弱コンパクト基数

YasudaYasutomo

平成 31 年 2 月

弱コンパクト基数を例に，巨大基数の組み合わせ論的性質とモデル理論的性質の二つの側面を見ていく．

1 記法

remark 1. 順序数を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ などで表し，基数を κ, λ などで表す．

通常の一階述語論理を拡張したものを考える．

definition 1.1. 言語 $\mathrm{L}_{\kappa,\lambda}$ での論理式は以下の条件を満たす．

- 非論理記号は通常の一階述語論理と同じ．
- 変数は $\max(\{\kappa, \lambda\})$ 個用意する．
- 任意の $\alpha < \kappa$ において，α 個の $\bigvee_{\xi<\alpha}$ や $\bigwedge_{\xi<\alpha}$ を許す．
- 任意の $\beta < \lambda$ において，β 個の量化 $\forall_{\xi<\beta}$ や $\exists_{\xi<\beta}$ を許す．
- 自由変数は λ 個未満個許す．

definition 1.2. 論理式の集合 Σ が κ-充足可能であるとは,Σ の任意のサイズ κ 未満の部分集合がモデルを持つことをいう．

remark 2. 通常の一階述語論理の言語は $\mathrm{L}_{\omega,\omega}$ である．

definition 1.3. $\kappa \to (\lambda)^n_m$ で任意の $[\kappa]^n$ の m 個の分割に対して，サイズ λ の *homogeneous* な集合が取れることを表す．

2 弱コンパクト基数

次の二つは ω で成り立つ性質である．

- $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m (n, m \in \omega)$．特に $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$．(Ramsey の定理)
- 任意の $\mathrm{L}_{\omega,\omega}$-文の集合において，$\omega$-充足可能（有限充足可能) ならば充足可能．(コンパクト性定理)

同じこと，もしくは少し弱めたことが非可算無限基数 κ でも言えるだろうか?そのような κ はどのような性質を持ちうるだろうか?

definition 2.1 (弱コンパクト基数)**.** κ が弱コンパクト基数であるとは，非可算かつ $\kappa \to (\kappa)^2_2$ を満たすこと

をいう．

definition 2.2 (弱コンパクト基数)**.** κ が弱コンパクト基数であるとは，非可算かつ $L_{\kappa,\kappa}$-文の集合で非論理記号を高々 κ 個しか使っていないものにおいて，κ-充足可能ならば充足可能．(弱コンパクト性)

弱コンパクト基数の定義を二つ記した．前者は組み合わせ論的性質で後者はモデル理論的性質である．まずはこの定義が同値で本当に同じ基数を定義しているのかを確かめる必要があるが，それは後々行うとしてこの弱コンパクト基数がどのような性質を持つのか組み合わせ論とモデル理論の二つの立場からみる．便宜上，分けて述べる必要があるときは前者を弱コンパクト基数 (C)，後者を弱コンパクト基数 (M) と書くことにする．

まず第一に弱コンパクト基数は巨大基数である．

lemma 2.3. κ を無限基数とする．2^κ に辞書式順序を入れた順序集合において $(2^\kappa, <)$ は単調増加または単調減少な κ^+-列をもたない．

Proof. そうでないとし，$W = \{f_\alpha \,|\, \alpha < \kappa^+\} \subset 2^\kappa$ を単調増加な列とする（単調減少でも同様）．$\gamma \leq \kappa$ を $\{f_\alpha \restriction \gamma \,|\, \alpha < \kappa^+\}$ がサイズ κ^+ となる最小のものとすると，W を取り直して任意の $f, g \in W$ において $f \restriction \gamma \neq g \restriction \gamma$ と仮定して良い．

各 $\alpha < \kappa^+$ において，ξ_α を $f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha$ かつ $f_\alpha(\xi_\alpha) = 0$，$f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1$ となるものとする．$\xi_\alpha < \gamma$ である．このとき，ある $\xi < \gamma$ が存在して，W の κ^+ 個の f_α において $\xi = \xi_\alpha$ が成立する．しかし $\{f_\alpha \restriction \xi \,|\, \alpha < \kappa^+\}$ はサイズ κ^+ であることより γ の最小性に矛盾する． □

lemma 2.4. κ を無限基数とする．$2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$

Proof. $2^\kappa = \lambda$ とし，$\{f_\alpha \,|\, \alpha < \lambda\}$ とおく．λ に 2^κ の辞書式順序から誘導される順序 $\prec$ を入れる．分割 $F : [\lambda]^2 \to 2$ を

- $F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \leftrightarrow \alpha \prec \beta$かつ$\alpha < \beta$

とする．$H \subset \lambda$ をサイズ κ^+ の homogeneous な集合とする．$\{f_\alpha \,|\, \alpha \in H\}$ はサイズ κ^+ の単調増加または単調減少列となり矛盾． □

theorem 2.5. 弱コンパクト基数は到達不能基数である．

（組み合わせ論的証明)

Proof. κ を弱コンパクト基数（C) とする．

（正則性）　ある $\lambda < \kappa$ と各 $\gamma < \lambda$ において $|A_\gamma| < \kappa$ を満たす互いに素な集合族 $\{A_\gamma \,|\, \gamma < \lambda\}$ が存在して，$\kappa = \bigcup_{\gamma<\lambda} A_\gamma$ を満たすと仮定する．分割 $F : [\kappa]^2 \to 2$ を

- $F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \leftrightarrow \exists\gamma \, s.t. \, \alpha \in A_\gamma \wedge \beta \in A_\gamma$

とすると，明らかにこの分割はサイズ κ の homogeneous な集合を持たないので矛盾．ゆえに κ は正則基数である．

（強極限）ある $\lambda < \kappa$ が存在して $\kappa \leq 2^\lambda$ を満たすと仮定する．$2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2$ より $\kappa \nrightarrow (\lambda^+)^2$ ゆえ，$\kappa \nrightarrow (\kappa)^2$ となり κ が弱コンパクト基数であることに矛盾．ゆえに κ は強極限基数である． □

（モデル理論的証明)

Proof. κ を弱コンパクト基数（M) とする．

（正則性）ある非有界な部分集合 $X \subset \kappa$ でサイズ κ 未満のものが存在したと仮定する．異なる新しい定数 $c, c_\alpha(\alpha < \kappa)$ を用意し，次の論理式の集合を考える．

- $\{c \neq c_\alpha \,|\, \alpha < \kappa\} \cup \{\bigvee_{\beta \in X} \bigvee_{\alpha < \beta} c = c_\alpha\}$

これは明らかに κ-充足可能だが充足可能でない．κ が弱コンパクト基数であることに矛盾ゆえ，κ は正則基数である．

（強極限）ある $\lambda < \kappa$ が存在して $\kappa \leq 2^\lambda$ を満たすと仮定する．新しい定数 $c_\alpha, d^i_\alpha(\alpha < \lambda, i < 2)$ を用意する．次の論理式の集合を考える．

- $\{\bigwedge_{\alpha<\lambda}[(c_\alpha = d^0_\alpha \vee c_\alpha = d^1_\alpha) \wedge d^0_\alpha \neq d^1_\alpha]\} \cup \{\bigvee_{\alpha<\lambda}(c_\alpha \neq d^{f(\alpha)}_\alpha \,|\, f \in 2^\lambda\}$

これは明らかに κ-充足可能だが充足可能でない．ゆえ κ は強極限基数である． □

弱コンパクト基数は木の性質で特徴付けることができる．このことが二つの定義を結びつけると同時に，二つ性質の繋がりを明瞭にしてくれる．

definition 2.6 (木)**.**

- 半順序集合 $(T, <)$ が木であるとは，各 $x \in T$ において $\{y \,|\, y < x\}$ が整列集合になっていることをいう．
- $x \in T$ において $o(x) = \mathrm{type}(\{y \,|\, y < x\})$
- $\mathrm{lev}(\alpha) = \{x \,|\, o(x) = \alpha\}$
- $\mathrm{height}(T) = \sup\{o(x) + 1 \,|\, x \in T\}$
- 包含に関して極大な全順序部分集合 $B \subset T$ を T の枝という．枝 B の長さとは $\mathrm{type}(B)$ のことである．

definition 2.7.

- 木 T が κ-木であるとは，高さが κ で各 *level* のサイズが κ 未満になっていることをいう．
- κ を非可算正則基数とする．κ が木の性質を持つとは，全ての κ-木がサイズ κ の枝を持つことをいう．

theorem 2.8 (木による特徴付け)**.**

1. κ が弱コンパクト基数 (C) ならば,κ は木の性質を持つ．

2. κ が到達不能基数かつ木の性質を持つならば，κ は弱コンパクト基数 (C) である．

Proof. (1) κ を弱コンパクト基数 (C) とし，$(T, <_T)$ を κ-木とする．κ は到達不能基数であるから，$|T| = \kappa$ より $T = \kappa$ としても良い．κ 上の半順序 $<_T$ を全順序 $\prec$ に拡張する．

- $\alpha <_T \beta \to \alpha \prec \beta$
- α と β が比較不能のとき，ξ を α と β の前者 α_ξ と β_ξ が異なるような最小の level とし，$\alpha \prec \beta \leftrightarrow \alpha_\xi < \beta_\xi$ とする．

分割 $F : [\kappa]^2 \to 2$ を

- $F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \leftrightarrow \alpha \prec \beta \wedge \alpha < \beta$

とする．κ:弱コンパクト基数より，サイズ κ の homogeneous な集合 H が取れる．　$B \subset \kappa$ を全ての $x \in B$ で $\{\alpha \in H \,|\, x <_T \alpha\}$ がサイズ κ となるように取る．T : κ-木であるから，各 level の元を少なくとも一つは含んでいる．さらに取りかたから B は $<_T$ に関して全順序集合となっていることから B は T のサイズ κ を枝である．ゆえに κ は木の性質を持つ．

(2) κ を到達不能基数かつ木の性質を持つとする．任意に分割 $F : [\kappa]^2 \to 2$ を取る．要素として関数 $t : \gamma \to 2(\gamma < \kappa)$ を持つ木 $(T, \subset)$ を帰納法によって次のように構成する．

（構成）$t_0 = \emptyset$ とし，各 $\alpha < \kappa$ において $t_0, ..., t_\beta(\beta < \alpha)$ まで構成したとする．t_α を次のように作る．ξ による帰納法で，$t_\alpha \restriction \xi$ がどの t_β とも異なるとき，$t_\alpha = t_\alpha \restriction \xi$ とする．ある $\beta < \alpha$ において $t_\alpha \restriction \xi = t_\beta$ のとき，$t_\alpha(\xi) = F(\{\alpha, \beta\})$ とする．（構成 – 終–）

$(T, \subset)$ はサイズ κ かつ κ は到達不能基数であるから，各 level のサイズは κ 未満となる．ゆえに $(T, \subset)$ の高さは κ である．構成より $t_\beta \subset t_\alpha \to \beta < \alpha$ かつ $F(\{\beta, \alpha\}) = t_\alpha(len(t_\beta))$ が成立する．κ は木の性質を持つからサイズ κ の枝 B を持つ．$H_i = \{\alpha \,|\, t_\alpha \in B \wedge t_\alpha \circ i \in B\}(i = 0, 1)$ とすると H_i は分割 F に対する homogeneous な集合であり，そのどちらかはサイズ κ である．　□

theorem 2.9 (定義の同値性)**.**

1. *κ が弱コンパクト基数 (C) ならば，言語 $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ は弱コンパクト性を満たす．*
2. *κ が到達不能基数で $\mathrm{L}_{\kappa,\omega}$ が弱コンパクト性を満たすならば，κ は弱コンパクト基数 (C) である．*

Proof. (1) 証明は通常のコンパクト性定理と同様である．Σ を非論理記号を高々 κ 個しか使っていない $\mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$-文の集合で κ-充足可能なものとする．$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\kappa,\kappa}$ とする．仮定より $|\mathrm{L}| = \kappa$ として良い．言語を次のように拡張する．各論理式 ϕ の自由変数 $v_\xi(\xi < \alpha)$ に対して，新しい定数 $c^\phi_\xi(\xi < \alpha)$ を用意して, 言語 L を $\mathrm{L}^{(1)}$ に拡張する．これを繰り返して，$\mathrm{L}^* = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{L}^{(n)}$ を得る．κ 到達不能基数より，$|\mathrm{L}^*| = \kappa$ である．次に各論理式 $\phi(v_\xi)_{\xi<\alpha}$ に対して，$\sigma_\phi \equiv \exists_{\xi<\alpha}\phi(v_\xi)_{\xi<\alpha} \to \phi(c^\phi_{xi})_{\xi<\alpha}$ として，$\Sigma^* = \Sigma \cup \{\sigma_\phi \,|\, \phi : \mathrm{L}^* - \text{論理式}\}$ とする．$\{\psi_\alpha \,|\, \alpha < \kappa\}$ を L^*-文の数え上げとする．$(T, \subset)$ を要素として関数 $t : \gamma \to 2(\gamma < \kappa)$ を持つ木で次の条件を満たすものとする．

- 各 $t \in T$ に対して，$\Sigma \cap \{\psi_\alpha \,|\, \alpha \in \mathrm{dom}(t)\}$ のモデル $\mathfrak{A}$ で各 $\alpha \in \mathrm{dom}(t)$ に対して，$t(\alpha) = 1 \leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi_\alpha$ が成立するものが存在する．

κ は木の性質を持つことより，サイズ κ の枝 B を取る．$\Delta = \{\psi_\alpha \,|\, \exists t \in B(t(\alpha) = 1)\}$ とする．$\Sigma^* \subset \Delta$ である．構造 $\mathfrak{A}$ の領域を L^* の定数項の集合を $\tau_1 \sim \tau_2 \leftrightarrow (\tau_1 \doteq \tau_2) \in \Delta$ で定めた同値関係で割ったものとする．あとは通常のコンパクト性定理と同様に解釈を定めてやると $\mathfrak{A}$ は Δ のモデルとなっている．つまり Σ のモデルでもある．

(2) κ が木の性質を持っていることを示す．任意に κ-木 $(T, <)$ を取る．新しい定数 $c_x(x \in T)$ と一項述語 B を用意する．次の論理式の集合 Σ を考える．

- 任意の比較不能な $x, y \in T$ において，$\neg(B(c_x) \wedge B(c_y))$
- 全ての $\alpha < \kappa$ と T の α-level U_α において，$\bigvee_{x\in U_\alpha} B(c_x)$

Σ は κ-充足可能である．ゆえ弱コンパクト性より Σ はモデルを持ち，B の解釈が T のサイズ κ の枝となっている．　□

弱コンパクト基数の二つの定義が同値であることが確かめられた．これまでの証明をみると組み合わせ論的

性質とモデル理論的性質の繋がりが見えてくるだろう．更なる弱コンパクト基数の性質をみていく．

3　記述不能性

記述不能性を使うと弱コンパクト基数の別な特徴づけが得られる．

definition 3.1. $n, m \in \omega$ として，基数 κ が Π^n_m-記述不能であるとは，任意の $R \subset V_\kappa$ と任意の Π^n_m-文 ϕ で $(V_\kappa, \in, R) \models \phi$ を満たすものにおいて，ある $\alpha < \kappa$ が存在して，$(V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha) \models \phi$ を満たすことをいう．

definition 3.2. κ が拡張の性質を持つとは，任意の $R \subset V_\kappa$ においてある推移的集合 $X \neq V_\kappa$ と $S \subset X$ が存在して，$(V_\kappa, \in, R) \prec (X, \in, S)$ を満たすときのことをいう．

弱コンパクト基数は上方向への反映を持つ．

theorem 3.3. κ が弱コンパクト基数ならば，κ は拡張の性質を持つ．

Proof. κ を弱コンパクト基数とし， $R \subset V_\kappa$ を任意に取る．κ は到達不能基数であるから $|V_\kappa| = \kappa$ が成立する．新しい定数 $c, \dot{x} (x \in V_\kappa)$ を用意する. 論理式の集合 Σ を

- $\Sigma = \mathrm{th}((V_\kappa, \in, R, \dot{x})_{x \in V_\kappa}) \cup \ulcorner c$ は順序数 $\urcorner \cup \{c \neq \dot{\alpha} \mid \alpha < \kappa\}$

とする．Σ は κ-充足可能である．弱コンパクト性より Σ のモデルを得る．そのモデルの推移的崩壊を $(X, \in, S, \bar{x}, \gamma)_{x \in V_\kappa}$ とする　(γは c の解釈である). 初等性より任意の $x \in V_\kappa$ において，$\bar{x} = x$ である．また $\gamma \geq \kappa$ より，$X \neq V_\kappa$ である．ゆえに $(X, \in, S)$ は求めるものとなっている． □

実は弱コンパクト基数であることと拡張の性質を持つことは同値であるが，それは次の記述不能性の証明からわかる．

fact 1. 次は同値である

1. κ が到達不能基数でない．
2. ある $m \in \omega$ が存在して κ は Π^0_m-記述可能．

theorem 3.4 (弱コンパクト基数の記述不能性)**.** 次は同値である

1. κ は弱コンパクト基数
2. κ は Π^1_1-記述不能

Proof. $(1 \to 2)$ κ が弱コンパクト基数だと仮定する．任意に $R \subset V_\kappa$ と $(V_\kappa, \in, R) \models \phi$ なる Π^1_1-論理式 ϕ を取る．$\phi = \forall A \psi(A)$(A は二階の変数, ψは一階の論理式) とおく．κ は拡張の性質を持つから $(V_\kappa, \in, R)$ の初等拡大 $(X, \in, S)$ を取る．$\kappa \in X$ である．$V^X_\kappa = V_\kappa$ かつ $(\forall A \subset V_\kappa)(V_\kappa, \in, R) \models \psi(A)$ ゆえ，$(X, \in, S) \models (\forall A \subset V_\kappa)(V_\kappa, \in, S \cap V_\kappa) \models \psi(A)$ が成立する．さらに $(X, \in, S) \models \exists \alpha (\forall A \subset V_\alpha)(V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha) \models \psi(A)$ ゆえ，$(V_\kappa, \in, R) \models \exists \alpha (\forall A \subset V_\alpha)(V_\alpha, \in, S \cap V_\alpha) \models \psi(A)$．したがってある $\alpha < \kappa$ が存在して，$(V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha) \models \phi$. ゆえに κ は Π^1_1-記述不能である．

$(2 \to 1)$ κ を Π^1_1-記述不能だと仮定する．fact より κ は到達不能基数である．κ は木の性質を持つことを示す．theorem 2.9. より木 $(T, <)$ で関数 $t{:}\gamma \to 2$ $(\gamma < \kappa)$ からなるものを考えればよい．$t \in T$ で $\mathrm{dom}(t) = \alpha$

なるものを取って，$B = \{t \restriction \xi \mid \xi < \alpha\}$ とすれば，任意の $\alpha < \kappa$ において $(V_\alpha, \in, T \cap V_\alpha) \models \exists B(B \subset T \wedge B$ は非有界な枝) である．　これは Σ^1_1-文であり，κ は Π^1_1-記述不能であることから $(V_\kappa, \in, T)$ は長さサイズ κ の枝を持つ．ゆえに κ は弱コンパクト基数である． $\square$

最後に弱コンパクト基数は L と両立することを示す．

lemma 3.5. κ を弱コンパクト基数とする．$A \subset \kappa$ が任意の $\alpha < \kappa$ において $A \cap \alpha \in \mathrm{L}$ ならば $A \in \mathrm{L}$.

Proof. $A \subset \kappa$ が条件を満たすとする．κ は弱コンパクト基数より拡張の性質を持つことから，初等拡大 $(V_\kappa, \in, A) \prec (X, \in, A^*)$ を取る．$\kappa \in X$ であるから，論理式 $\forall \alpha \exists x(x$ は構成可能 $\wedge\, x = A \cap \alpha)$ を考えれば良い． $\square$

theorem 3.6. κ が V で弱コンパクト基数ならば，L でも弱コンパクト基数である．

Proof. L の中で κ-木 $(\kappa, <_T)$ を取る．κ は弱コンパクト基数より V でサイズ κ の枝 B が取れる．lemma 3.5. より $B \in \mathrm{L}$ となり κ は L でも木の性質を持つ．到達不能性は下方向に絶対的だから κ は L でも弱コンパクト基数である． $\square$

可測基数は $V \neq L$ を導くが，弱コンパクト基数は $V = L$ と両立する．これまで弱コンパクト基数の性質をみてきたが弱コンパクト基数は無矛盾性の強さでは巨大基数の中ではまだ弱いものである．弱コンパクト基数よりも強い可測基数や強コンパクト基数，超コンパクト基数はより強い組み合わせ論的性質や反映の性質を持っている．それでもこの弱コンパクト基数から，組み合わせ論的性質とモデル理論的性質という一見かけ離れた二つの性質との間に深い繋がりをみることができる．集合論の奥深さの一つといえよう．

4　参考文献

[1] A.J.Kanamori,The Higher Infinite,Second Edition. Springer, 2009.

[2] T.Jech, Set Thoery,The Third Millennium Edition,Revised and Expanded. Springer, 2002.

[3] K.Kunen 著, 藤田博司訳. 集合論 独立性証明への案内. 日本評論社,2008.